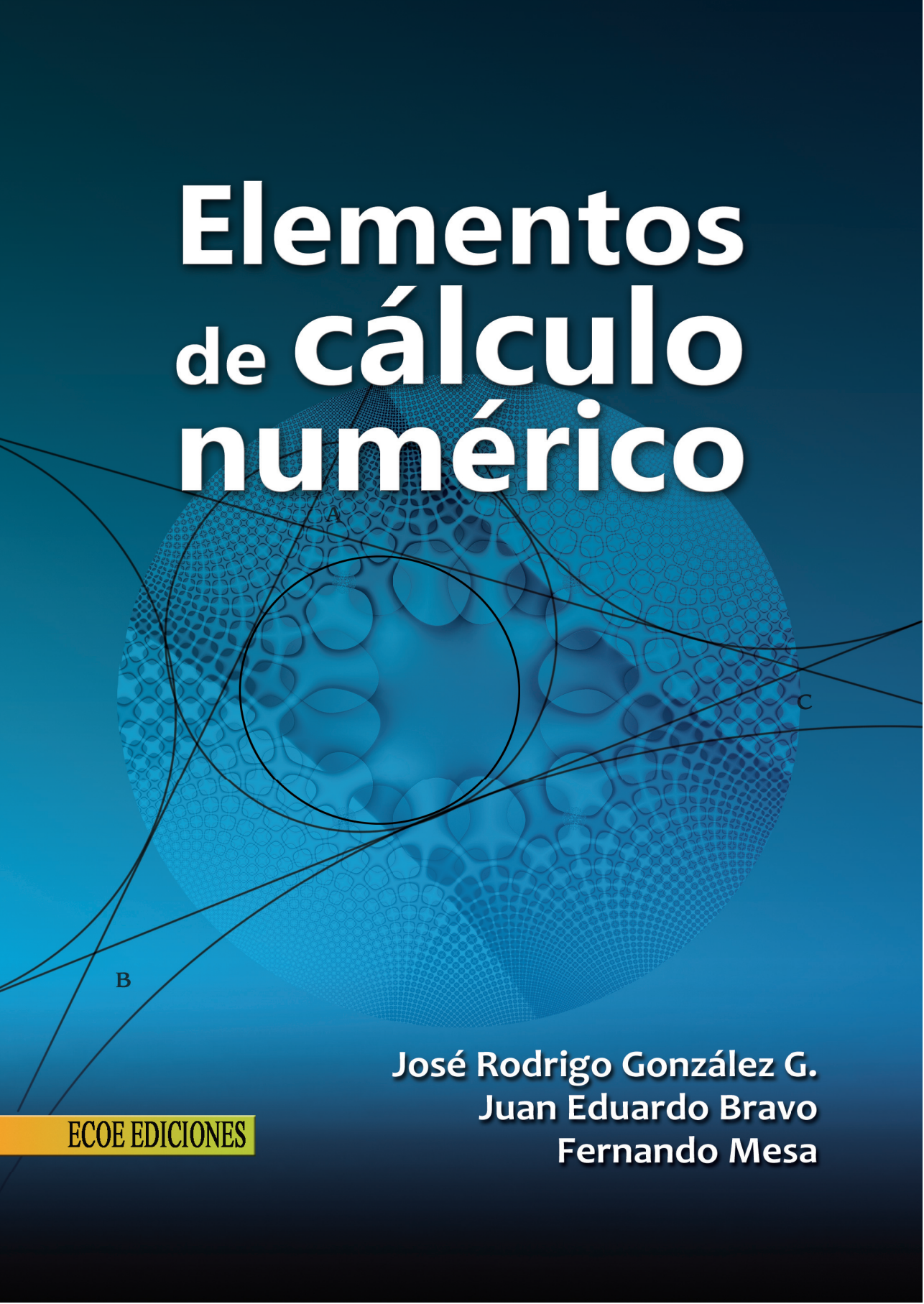


# Elementos de cálculo numérico



José Rodrigo González G.  
Juan Eduardo Bravo  
Fernando Mesa

ECOE EDICIONES



### **JOSÉ RODRIGO GONZÁLEZ GRANADA**

Matemático, con Maestría en Matemáticas y doctorado en Matemáticas. Investigador en matemáticas puras y aplicadas con resultados originales en la teoría de bifurcación, deformación y deducción de la teoría de micro-deformación. Investigador en ecuaciones diferenciales parciales. Profesor asociado de la Universidad Tecnológica de Pereira.  
mail: jorodry@gmail.com.



### **JUAN EDUARDO BRAVO BOLÍVAR**

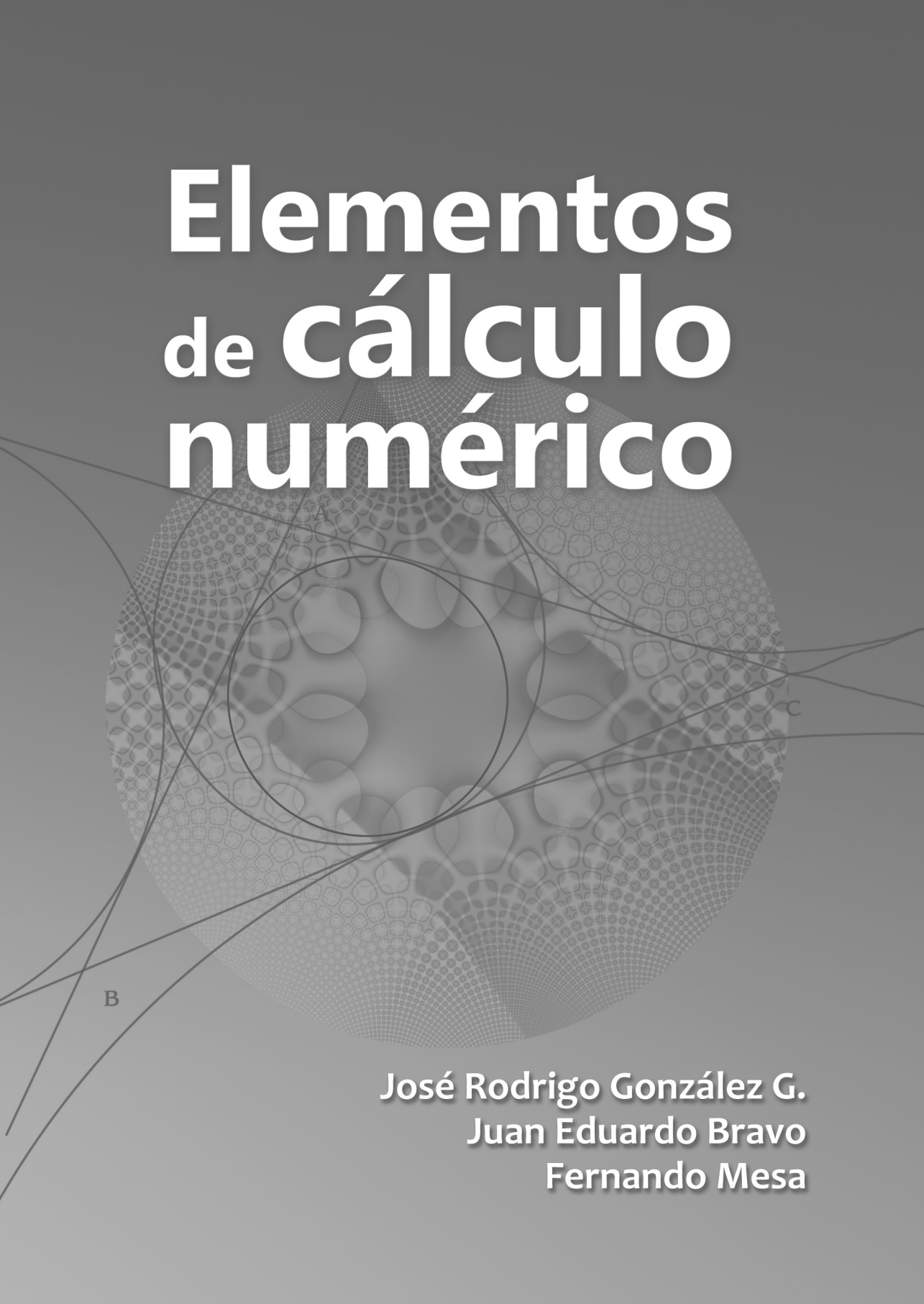
Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad Tecnológica de Pereira. Especialista en Instrumentación Física de la Universidad Tecnológica de Pereira. Posee estudios de posgrado en Ingeniería Eléctrica y en Enseñanza de las Matemáticas. Profesor asistente de la Universidad Tecnológica de Pereira. Desde 1995 ha orientado los cursos de métodos y análisis numérico. E-mail: juan.e.bravo@hotmail.com



### **FERNANDO MESA**

Licenciado en matemáticas, graduado de la Universidad Tecnológica de Pereira con honores. Tiene estudios de posgrado en Matemáticas, Instrumentación Física y Docencia Universitaria. Con experiencia de más de 20 años, profesor titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira en donde se ha destacado como directivo e investigador. E-mail: femesa@utp.edu.co

# Elementos de **cálculo** numérico

The background features a large, semi-transparent circular grid pattern that tapers towards the center. Overlaid on this are several thin, dark lines that intersect to form various geometric shapes, including circles and triangles. The letters 'A', 'B', and 'C' are placed at specific points where these lines intersect: 'A' is near the top center, 'B' is on the left side, and 'C' is on the right side.

José Rodrigo González G.  
Juan Eduardo Bravo  
Fernando Mesa

# ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO

**José Rodrigo González G.**

Profesor asistente

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Básicas

Universidad Tecnológica de Pereira

**Juan Eduardo Bravo B.**

Profesor asistente

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Básicas

Universidad Tecnológica de Pereira

**Fernando Mesa**

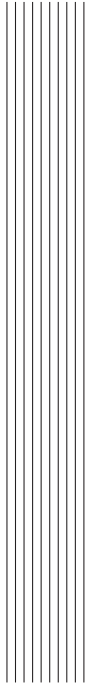
Profesor titular

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Básicas

Universidad Tecnológica de Pereira

Febrero de 2012



# CONTENIDO

<b>1</b>	<b>PREFACIO</b>	<b>III</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares matemáticos</b>	<b>1</b>
2.1	Repaso de cálculo . . . . .	2
2.2	Errores y aproximación. . . . .	6
2.3	Ejemplos y aplicaciones . . . . .	7
2.4	Ejercicios . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Solución de ecuaciones no lineales</b>	<b>11</b>
3.1	Método de bisección . . . . .	12
3.2	Método de la regla falsa . . . . .	14
3.3	Iteración de punto fijo . . . . .	14
3.4	Método de Newton Raphson . . . . .	20
3.5	Método de la secante . . . . .	23
3.6	Raíces de multiplicidad . . . . .	24
3.7	Ejemplos y aplicaciones . . . . .	27
3.8	Ejercicios . . . . .	33

---

<b>4</b>	<b>Sistemas de ecuaciones no lineales</b>	<b>35</b>
4.1	Ejemplos y aplicaciones . . . . .	39
4.2	Ejercicios . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Diferenciación numérica</b>	<b>43</b>
5.1	Método de las diferencias divididas finitas hacia adelante . . . . .	44
5.2	Método de las diferencias divididas finitas hacia atrás . . . . .	44
5.3	Método de las diferencias divididas finitas centrales . . . . .	45
5.4	Ejemplos y aplicaciones . . . . .	46
5.5	Ejercicios . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Interpolación y aproximación polinomial</b>	<b>51</b>
6.1	Aproximación por el polinomio de Taylor . . . . .	52
6.2	Polinomio de interpolación de Newton . . . . .	55
6.3	Polinomio de interpolación de Lagrange . . . . .	57
6.4	Trazador Cúbico - Spline cúbico . . . . .	59
6.5	Ejemplos y aplicaciones . . . . .	69
6.6	Ejercicios . . . . .	74
<b>7</b>	<b>Integración numérica</b>	<b>77</b>
7.1	Integral de Riemann . . . . .	78
7.2	Regla del trapecio . . . . .	85
7.3	Regla de Simpson de $\frac{1}{3}$ . . . . .	89
7.4	Regla de Simpson de $\frac{3}{8}$ . . . . .	92
7.5	Extrapolación de Richardson . . . . .	94
7.6	Integración de Romberg . . . . .	97
7.7	Ejemplos y Aplicaciones . . . . .	98
7.8	Ejercicios . . . . .	108
<b>8</b>	<b>Ecuaciones diferenciales</b>	<b>111</b>
8.1	Solución numérica . . . . .	112
8.2	Método de la serie de Taylor . . . . .	112
8.3	Método de Euler . . . . .	114
8.4	Método de Heun o Euler mejorado . . . . .	115
8.5	Método de Runge-Kutta . . . . .	116
8.6	Ejemplos . . . . .	117
8.7	Ejercicios . . . . .	120
	<b>Bibliografía</b>	<b>122</b>



# 1 PREFACIO

Este texto tiene como objetivo familiarizar a los estudiantes de ingeniería con los métodos numéricos más utilizados para solucionar problemas de la realidad. Contiene elementos teóricos y ejercicios suficientes para ser usado como libro de texto en los cursos de métodos numéricos que se imparten en las diversas universidades colombianas en las carreras de ingenierías y tecnologías. En particular, en la Universidad Tecnológica de Pereira el libro puede ser utilizado en los cursos de métodos numéricos.

El enfoque principal de esta obra se basa en que cada método es explicado brevemente y en algunas partes, sin entrar en profundidad, sobre sus fundamentos del análisis matemático. Además, para cada método expuesto se da su respectivo algoritmo en pseudocódigo y se dan un buen número de ejemplos para su mejor asimilación. En ocasiones, se ha manejado el mismo problema para ser resuelto utilizando varios métodos numéricos, con el objetivo de comparar la bondad de los mismos.

Éste ha sido nuestro objetivo principal al escribir estas notas y, con la idea de que sean útiles al mayor número posible de lectores, hemos procurado exponer los conceptos de tal manera que puedan ser entendidos sin dificultad por aquéllos que conozcan las nociones básicas del cálculo real, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales ordinarias.

El libro surge como resultado de la enseñanza del curso por los autores du-

rante varios años para los estudiantes de ingenierías y tecnologías en la Universidad Tecnológica de Pereira. El contenido del libro está basado en el programa oficial de la Universidad Tecnológica de Pereira: interpolación y aproximación, integración numérica, resolución de ecuaciones no lineales, métodos directos e iterativos de resolución de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, métodos de diferencias.

El libro se divide en siete capítulos que pueden ser cubiertos en 16 semanas de clase con una intensidad de 3 horas semanales.

En el capítulo 1 se da un breve repaso del cálculo diferencial e integral para funciones de una y varias variables reales.

En el capítulo 2 se hace un estudio de las soluciones de ecuaciones no lineales. En particular, se estudian los métodos de bisección, regla falsa, iteración de punto fijo, Newton-Raphson, secante, raíces de multiplicidad.

En el capítulo 3 se estudian los método de Newton para solucionar ecuaciones no lineales. En la mayoría de los textos de análisis numérico el estudio de sistemas de ecuaciones no lineales, sólo se hace un tratamiento para funciones de dos variables y se evita el caso de más de dos variables para la deducción del método. Aquí, se presenta una alternativa metodológica y pedagógica para hacer mas sencilla la comprensión de éste, esta metodología es el resultado de la experiencia docente en las aulas de clase. En el capítulo 4 se estudia la diferenciación numérica. En particular, el método de las diferencias divididas finitas. En el capítulo 5 se analiza la interpolación y aproximación utilizando el polinomio de Taylor, Newton, Lagrange y trazador cúbico.

En el capítulo 6 se estudia la integración numérica. En particular, utilizando la regla del trapecio, Simpson, Richardson, Romberg.

El libro concluye con el capítulo 7 donde se estudian las soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias por medio de los los métodos de la serie de Taylor, Euler, Runge-Kutta.

Al final de cada capítulo se encuentran ejercicios propuestos para una comprensión mejor de los temas tratados.

Finalmente, los autores manifestamos nuestra gratitud a profesores colegas por las observaciones y consejos valiosos realizados durante la elaboración del libro. Igualmente, expresamos nuestra gratitud anticipada por las críticas, comentarios y sugerencias que los lectores estimen oportuno hacernos llegar sobre la presente obra.

LOS AUTORES





## 2 Preliminares matemáticos

La tecnología moderna requiere, y exige, más precisión en los cálculos matemáticos con el fin de agilizar y hacer más óptimos los procesos en las distintas aplicaciones de ingeniería que existen en el mundo de hoy. Por ejemplo, mencionando algunas áreas de aplicación: investigación de operaciones, procesamiento de imágenes, simulación en computadoras, diseño y control de sistemas físicos, cálculo de estructuras, etc. Es importante reconocer que la tecnología que poseemos depende, en gran parte, de la solución de modelos matemáticos desde el diseño de una calculadora científica hasta el diseño y simulación de una nave espacial. La solución de un modelo matemático simple puede derivarse de la aplicación de un proceso analítico. Pero, el mundo real, es complejo y requiere de la aplicación de técnicas numéricas que aproximen los modelos físicos, y además, generen soluciones dentro de ciertos márgenes de tolerancia.

Un modelo matemático, es una formulación en forma de ecuación que expresa las características esenciales de un sistema físico o de un proceso en términos matemáticos. En general, el modelo es una relación funcional donde la variable dependiente está en función de la variable independiente (o variables independientes), los parámetros y las perturbaciones externas que afectan al sistema. La variable dependiente refleja el comportamiento o estado del sistema, la variable independiente (o variables independientes), por lo general, son el tiempo y/o la posición,

a través de las cuales se determina el comportamiento del sistema; los parámetros reflejan las propiedades del sistema, y las perturbaciones son fuerzas externas que actúan afectando el sistema. En este punto, es conveniente resaltar la importancia del estudio de las funciones y de los teoremas que el análisis matemático proporciona. El análisis matemático de los métodos numéricos permite determinar la eficiencia o complejidad de los algoritmos asociados a la solución de problemas, ya sean académicos o del mundo real, así como la confiabilidad de los resultados obtenidos durante su aplicación.

En este capítulo, se presentan algunas definiciones y teoremas importantes en el análisis numérico.

## 2.1 Repaso de cálculo

**Definición 2.1.1.** Sea  $f$  una función definida en  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  y  $x_0 \in (a, b)$ . Se dice que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ , existe, si para todo  $\epsilon > 0$ , existe un número real  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \epsilon$ , siempre que  $0 < |x - x_0| < \delta$ .

**Definición 2.1.2.** Sea  $f$  una función definida en  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  y  $x_0 \in (a, b)$ . Se dice que la función  $f$  es **continua** en  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Definición 2.1.3.** Sea  $f$  una función definida en  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Se dice que la función  $f$  es continua en  $[a, b]$  si es continua en cada punto de  $[a, b]$ .

**Definición 2.1.4. Sucesión convergente.** Sea  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión infinita de números reales. La sucesión  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge al número  $p$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p,$$

si para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{Z}^+$  tal que para  $N < n$  implica que  $|p - p_n| < \epsilon$ .

**Teorema 2.1.5.** Si  $f$  es una función continua en  $[a, b]$ , entonces existe  $\xi \in [a, b]$  tal que  $f(\xi) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ .

**Teorema 2.1.6.** Suponga que  $f$  es una función continua sobre  $[a, b]$ , y sea  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  una partición. Entonces existe  $\xi \in [a, b]$  tal que

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) < f(\xi) < \max_{x \in [a, b]} f(x),$$

y

$$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k). \tag{2.1}$$

**Teorema 2.1.7. Teorema del valor intermedio.** Si  $f$  es una función continua en  $[a, b]$ , entonces existe  $\xi \in [a, b]$  tal que  $f(\xi)$  está entre  $f(a)$  y  $f(b)$ .

## Otros títulos de interés:

- **Estadística básica aplicada,**  
Ciro Martínez Bencardino
- **Estadística y muestreo,**  
Ciro Martínez Bencardino
- **Fundamentos de estadística.  
Para la investigación en educación,**  
Mireya Ardila Rodríguez
- **Álgebra lineal y programación lineal**  
Francisco Soler, Fabio Molina y  
Lucio Rojas.
- **Didáctica de las matemáticas**  
Robinson Castro Puche y  
Rubby Castro Puche.
- **Fundamentos de matemática**  
Francisco Soler Fajardo y  
Reinaldo Nuñez.
- **Matemáticas financieras aplicadas**  
Jhonny de Jesús Meza Orozco
- **Matemáticas financieras  
empresariales**  
Jhonny de Jesús Meza Orozco
- **Matemáticas para informática**  
Ismael Gutiérrez García.

# Elementos de cálculo numérico



Este texto es el resultado de la experiencia docente de los autores en los cursos de Métodos numéricos en la Universidad Tecnológica de Pereira. La obra se desarrolla en siete capítulos, iniciando con un repaso de cálculo y el posterior desarrollo de los temas: solución de ecuaciones no lineales, sistemas de ecuaciones no lineales, diferenciación numérica, interpolación y aproximación polinomial, integración numérica y ecuaciones diferenciales. Al final de cada tema, se encuentra ilustrado el correspondiente algoritmo del método desarrollado para que el estudiante lo implemente en un lenguaje de programación. Cada capítulo posee un buen número de ejemplos que ilustran los diferentes temas y así mismo, un suficiente número de ejercicios propuestos para que practique y pueda consolidar los conocimientos en la materia.

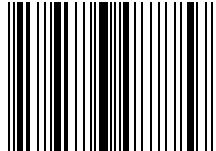
**Área:** Ciencias Exactas

**Colección:** Matemáticas

ECO  
EDICIONES

[www.ecoediciones.com](http://www.ecoediciones.com)

ISBN 978-958-648-775-7



9 789586 487757