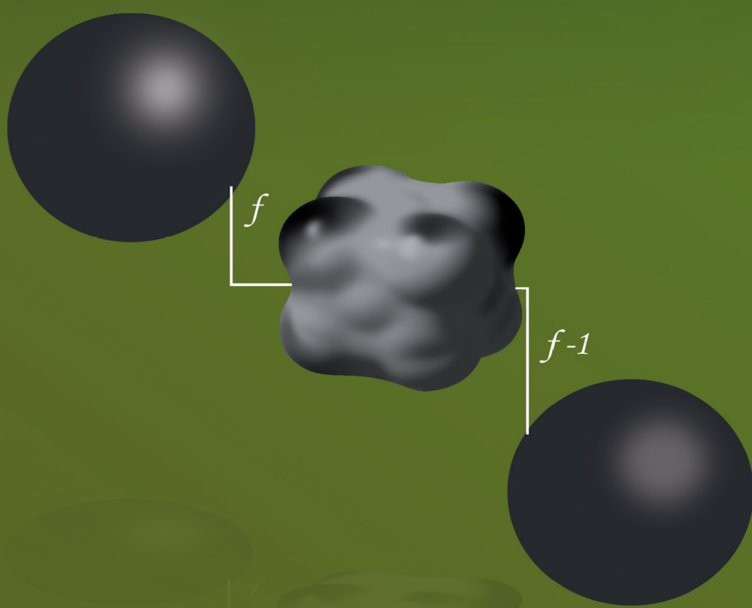
Homeomorfismo y separación en espacios topológicos



Fernando Mesa
Julián Guzmán Baena
Germán Correa Vélez

ECOE EDICIONES

FERNANDO MESA

Licenciado en Matemáticas, graduado de la Universidad Tecnológica de Pereira, UTP, con honores. Tiene estudios de posgrado en Matemáticas, Instrumentación Física y Docencia Universitaria. Con experiencia de más de 20 años, profesor titular del Departamento de Matemáticas de la UTP en donde se ha destacado como directivo e investigador.
E-mail: *femesa@utp.edu.co*

JULIÁN GUZMÁN BAENA

Docente Titular de la Universidad Tecnológica de Pereira. Magíster en Scientiae - Especialidad en Matematicas y Especialización en Computación para la docencia.

Con más de treinta años de experiencia, principalmente en los cursos de Topología general de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad Tecnológica de Pereira y otras áreas de desempeño como la *Historia de las matemáticas*.

GERMÁN CORREA VÉLEZ

Licenciado en Matemáticas y Física, 1998. Magíster en la Enseñanza de las Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, 2006 .

Profesor de planta de la Universidad Tecnológica de Pereira en la Categoría Asociado, con doce años de experiencia como docente universitario.

Homeomorfismo y separación en espacios topológicos

Julián Guzmán Baena
Docente Departamento de Matemáticas
Universidad Tecnológica de Pereira

Fernando Mesa
Docente Departamento de matemáticas
Universidad Tecnológica de Pereira

German Correa Vélez
Docente Departamento de matemáticas
Universidad Tecnológica de Pereira

Índice general

Prólogo

Cuando hablamos de topología conjuntista nos referimos a esa rama de las matemáticas que estudia las propiedades que se conservan (invariantes) cuando los objetos cambian continuamente; trata de responder una pregunta sumamente valioso en el conocimiento dialéctico de nuestro universo: ¿Qué es lo que se conserva cuándo los cuerpos cambian continuamente?.

Tales invariantes permiten la clasificación e igualdad de los objetos . El estudio de esos invariantes se realiza por funciones denominadas Homeomorfismos. La topología se concentra en espacios homeomorfos y sus propiedades, esto es, en espacios que tienen la misma forma topológica y en cualidades que no se alteran por cambios continuos: "Para un topólogo es lo mismo una circunferencia que una elipse.; dos intervalos semiabiertos son idénticos; dos intervalos cerrados y acotados siempre son los mismos"

En aras de darle consistencia a los invariantes topológicos, de modo que no se quedaran en la pura abstracción, en la primera mitad del siglo XX matemáticos como Kolmogorov, Frechet, Hausdorff, Uryson y Tychonoff entre otros, se dedicaron a estudiar el espacio y clasificar propiedades que permitían su caracterización; dignas de mencionar son las de separación entre y usando los elementos topológicos constitutivos (puntos, conjuntos, abiertos, cerrados, funciones, etc.).

La presente obra se concentra en el estudio intuitivo y formal de homeomorfismos y espacios homeomorfos; en su significado y relación con la geometría. Se establecen distintas maneras de caracterizar los homeomorfismos; y finaliza con los axiomas de separación en espacios topológicos.

Para comprender el contenido de esta solo se requiere que el lector conozca los conceptos esenciales de espacios topologicos: abiertos, cerrados, interior y clausura de un conjunto; y también la continuidad de funciones entre espacios topológicos. La obra está orientada para los licenciados en matemáticas y matemáticos que cursan Topología general. Por ello estos elementos introductorios se suponen conocidos por dichos estudiantes. El taller al final de los capítulos indicará si se ha logrado o no el objetivo de adquirir un buen conocimiento de los distintos tópicos tratados en el libro.

Deseamos que esta publicación sea del agrado del lector y logre dar respuestas sobre las inquietudes acerca de la explendorosa rama de la topología y los homeomorfismos.

Los autores.

Capítulo 1

Homeomorfismo o geometría del caucho

1.1. Noción intuitiva

Cuando un cuerpo A mediante un proceso continuo t reversible se transforma en un cuerpo B (ver figura 1.1), aparentemente todo cambia y nada se conserva. Tal transformación es tan delicada de analizar que normalmente no se encuentra similitud alguna entre los cuerpos A y B; sin embargo, a partir del enfoque topológico y con la ayuda de figuras como las acá ilustradas, se podrá verificar que sí existen propiedades de A que prevalecen en B. O lo mismo, existen propiedades que se conservan bajo tal transformación.

Anteriormente se han observado algunas propiedades de tipo conservativo (propiedades de los cuerpos que se conservan bajo transformaciones continuas-reversibles). Se analizarán dichas propiedades y otras más del mismo tipo. Ahora como simple ilustración, algunas propiedades de tipo conservativo que se pueden deducir de la figura 1.1:

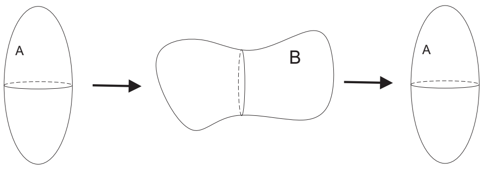


Figura 1.1.

I. Si A tiene borde y se pinta de color rojo, se puede aceptar que B también resultará con borde de color rojo. Es de aclarar que en este caso el borde de A es la superficie cerrada que lo envuelve. Por tanto, la propiedad de ser cerrado se conserva.

II. Un punto interior de A se transforma en un punto interior de B (y viceversa); lo cual indica que si A fuese abierto, entonces B también lo sería (el Int de A se convierte en el Int de B), y viceversa. En consecuencia, la propiedad de ser abierto se conserva.

III. Magnitudes finitas de A se transforman en magnitudes finitas de B: concretamente, curvas de longitud finita en A se convierten en curvas de longitud finita en B; regiones de área finita en A se transforman en regiones de área finita en B; y más aún, si A se puede meter en una cajita de volumen finito (ver figura 1.2). Esto último y lo visto en (I)

Otros títulos de interés:

- **Conexidad y arco-conexidad en espacios topológicos,**
 Fernando Mesa, Julián Guzmán Baena y Germán Correa Vélez.

- **Continuidad en espacios topológicos,**
 Fernando Mesa, Julián Guzmán Baena y Germán Correa Vélez.

- **Formación de profesores de matemática,**
 Fernando Mesa, Oscar Fernández Sánchez y Mónica Angulo Cruz.

- **Cálculo integral en una variable,**
 José Rodrigo González, Juan Eduardo Bravo y Fernando Mesa.

- **Elementos de cálculo numérico,**
 José Rodrigo González, Juan Eduardo Bravo y Fernando Mesa.

- **Introducción al álgebra lineal,**
 Fernando Mesa, Oscar Fernández Sánchez y Edgar Valencia Angulo.

- **Ecuaciones diferenciales ordinarias,**
 Alejandro Martínez, José Rodrigo González y Fernando Mesa.

- **Matemáticas para informática**
 Ismael Gutiérrez García.

Homeomorfismo y separación en espacios topológicos

La presente obra se concentra en el estudio intuitivo y formal de **homeomorfismos y espacios homeomorfos**; en su significado y relación con la geometría. Se establecen distintas maneras de caracterizar los homeomorfismos; y finaliza con los axiomas de separación en espacios tipológicos.

Para comprender el contenido solo requiere que el lector conozca los conceptos esenciales de los espacios topológicos: abiertos, cerrados, interior y clausura de un conjunto; y también la continuidad de funciones entre espacios tipológicos.

La obra está orientada para los licenciados en física y matemáticas, y matemáticos que requieren conocimientos de topología general. Por ello, se brindan suficientes ejemplos y se dan las explicaciones del caso para que los distintos temas acá tratados queden en poder de ellos.

Deseamos que esta publicación sea del agrado del lector y logre dar respuesta a inquietudes sobre la esplendorosa rama de la topología.

Área: Ciencias Exactas
Colección: Matemáticas

ECOE EDICIONES
www.ecoeediciones.com

ISBN 978-958-648-809-9
9 789586 488099