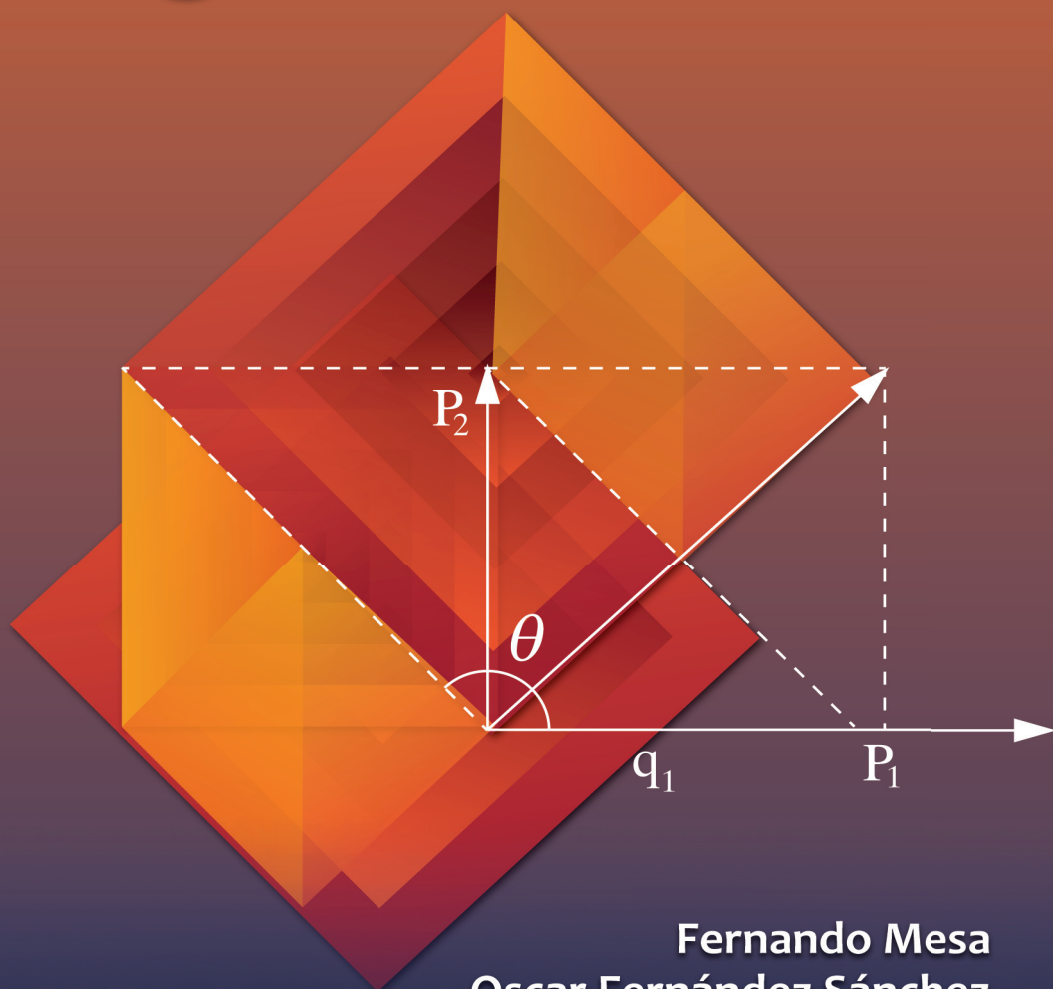


# Introducción al Álgebra lineal



Fernando Mesa  
Oscar Fernández Sánchez  
Edgar Alirio Valencia Angulo

ECO E EDICIONES



### **FERNANDO MESA**

Licenciado en matemáticas, graduado de la Universidad Tecnológica de Pereira con honores. Tiene estudios de posgrado en Matemáticas, Instrumentación Física y Docencia Universitaria. Con experiencia de más de 20 años, profesor titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira en donde se ha destacado como directivo e investigador. E-mail: femesa@utp.edu.co



### **OSCAR FERNÁNDEZ SÁNCHEZ**

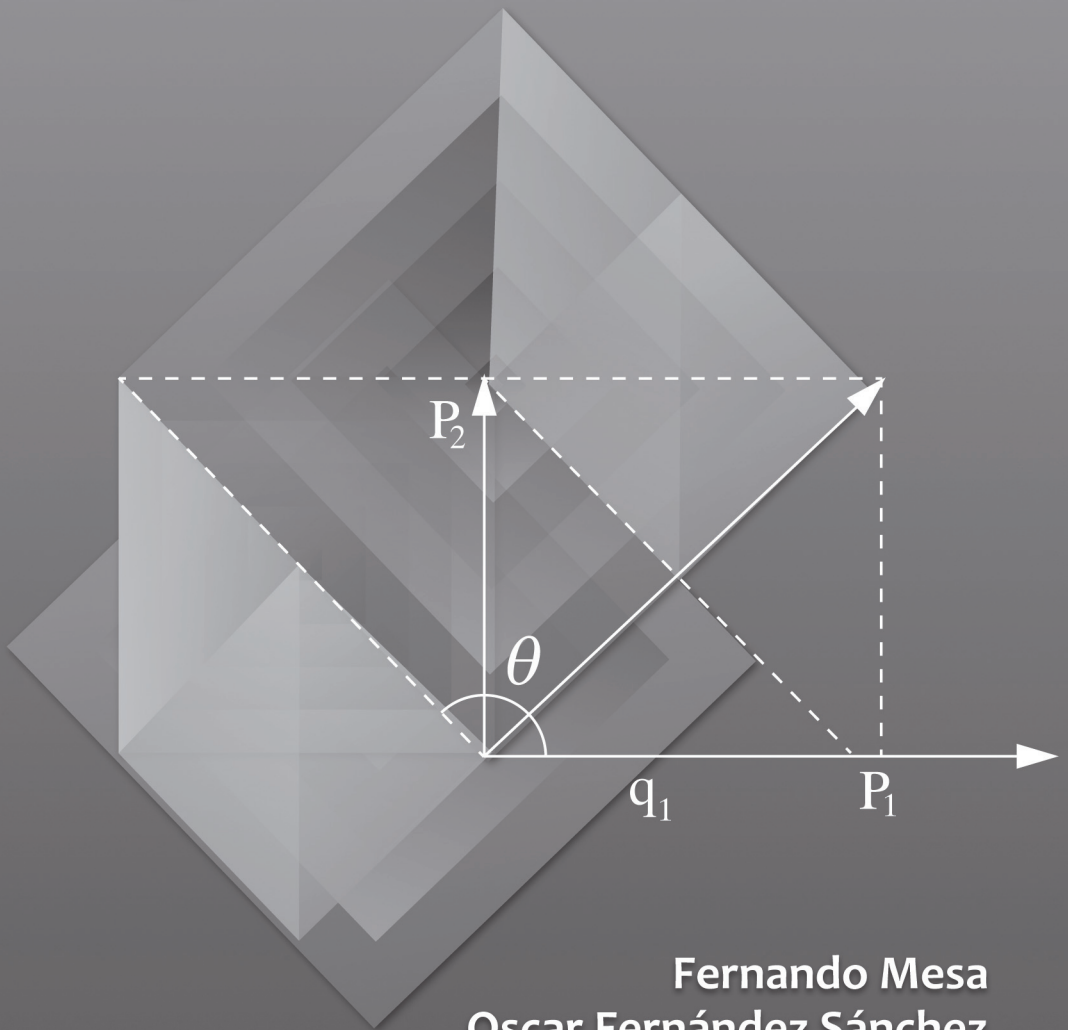
Licenciado en Matemáticas de la Universidad del Cauca, Magíster en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Valle, candidato a Doctor en Ciencias de la Educación de Rudecolombia. Actualmente, profesor asociado de planta del Departamento de Matemáticas y director de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira. Líder del Grupo de Investigación en Pensamiento Matemático y Comunicación, Gipemac. E-mail: oscarf@utp.edu.co



### **EDGAR ALIRIO VALENCIA ANGULO**

Matemático, con Maestría en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Valle; Cinco años de experiencia como profesor de planta en la modalidad de profesor asistente de la Universidad Tecnológica de Pereira. E-mail: evalencia@utp.edu.co

# Introducción al Álgebra lineal



Fernando Mesa  
Oscar Fernández Sánchez  
Edgar Alirio Valencia Angulo

# **INTRODUCCIÓN**

## **AL**

# **ÁLGEBRA LINEAL**

**Fernando Mesa**

Docente Departamento de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

**Edgar Alirio Valencia Angulo**

Docente Departamento de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

**Oscar Fernández Sánchez**

Docente Departamento de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

**Febrero de 2012**

# Índice general

---

<b>Índice general</b>	<b>2</b>
<b>1. Vectores rectas y planos</b>	<b>5</b>
1.1. Vectores en el plano ( $\mathbb{R}^2$ )	5
1.1.1. Operaciones entre vectores en $\mathbb{R}^2$	9
1.1.2. Producto escalar y las proyecciones en $\mathbb{R}^2$	12
1.1.3. Propiedades de la suma y la multiplicación por un escalar	14
1.1.4. Vector en $\mathbb{R}^3$	15
1.2. Rectas y planos en el espacio	19
1.2.1. Rectas paralelas y perpendiculares	21
1.2.2. Planos	24
1.3. Ejercicios resueltos del capítulo 1	30
1.4. Ejercicios del capítulo 1	39
<b>2. Matrices</b>	<b>54</b>
2.1. Operaciones entre matrices	54
2.2. Sistema de ecuaciones lineales	59
2.2.1. Solución de sistemas de ecuaciones lineales	59
2.2.2. Inversas de matrices cuadradas	63
2.2.3. Método para determinar $A^{-1}$	66
2.2.4. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices inversas	68
2.3. Ejercicios resueltos del capítulo 2	71
2.4. Ejercicios del capítulo 2	80
<b>3. Determinantes</b>	<b>88</b>
3.1. Geometría del determinante $2 \times 2$	89
3.2. Regla de Sarros para un determinante $3 \times 3$	90
3.3. El menor $(i, j)$ de una matriz	91
3.4. El cofactor de $(i, j)$ de una matriz	92
3.5. Definición del determinante	92
3.6. Cálculo de la inversa de una matriz usando determinantes	95
3.7. Ejercicios resueltos del capítulo 3	99
3.8. Ejercicios del capítulo 3	104

<b>4. Espacios vectoriales</b>	<b>109</b>
4.1. Subespacios vectoriales . . . . .	113
4.2. Combinaciones lineales . . . . .	115
4.3. Dependencia lineal . . . . .	116
4.4. Bases de espacios vectoriales . . . . .	119
4.5. Rango y nulidad de una matriz . . . . .	121
4.5.1. Imagen de una matriz . . . . .	124
4.6. Cambio de base . . . . .	127
4.7. Ejercicios resueltos del capítulo 4 . . . . .	133
4.8. Ejercicios del capítulo 4 . . . . .	140
<b>5. Transformaciones lineales</b>	<b>144</b>
5.1. Núcleo y recorrido . . . . .	149
5.2. Isomorfismos . . . . .	156
5.3. Ejercicios resueltos . . . . .	159
5.4. Ejercicios del capítulo 5 . . . . .	166
<b>6. Espacios euclideos</b>	<b>171</b>
6.1. Producto escalar . . . . .	171
6.2. Bases ortonormales . . . . .	175
6.3. Proyección ortogonal . . . . .	177
6.4. Ejercicios resueltos . . . . .	181
6.5. Ejercicios Propuestos . . . . .	187
<b>7. Vectores y valores propios</b>	<b>191</b>
7.1. Matrices semejantes y diagonalización . . . . .	196
7.2. Transformación lineal adjunta . . . . .	200
7.3. Transformaciones lineales hermitianas . . . . .	202
7.4. Problemas y ejercicios resueltos . . . . .	203

## Presentación

---

Esta obra ha sido realizada para que sea usada como texto guía en los cursos de Álgebra Lineal que se ofrecen en la Universidad Tecnológica da Pereira en los distintos programas de ingenierías, y el programa de licenciatura en matemáticas y física.

Se desarrollaron siete capítulos, en los que sin perder de vista la formalidad de los contenidos el lector podrá encontrarse con una presentación sencilla, practica y amena, haciendo posible un primer acercamiento al estudio del álgebra lineal. Es así como en el capítulo 1 se definen los vectores, rectas y planos con una variedad de ejemplos y ejercicios. Los capítulos 2 y 3 se concentran en tratar lo referente a matrices y determinantes con un gran número de ejemplos y ejercicios que le permiten al lector afianzar los resultados que aquí se presentan. En el capítulo 4 definimos los espacios vectoriales de tal manera que permita al alumno avanzar notablemente hacia el cumplimiento del paradigma tradicional en cuanto a las operaciones de suma y multiplicación por un escalar y el estudio de otras estructuras algebraicas diferentes a las de los reales. El capítulo 5 se refiere a uno de los temas más robustos del álgebra lineal como son las transformaciones lineales sus propiedades y el teorema de isomorfismo entre el espacio de las transformaciones lineales y el de matrices, hermosamente tratado. Se introduce en un capítulo 6 los espacios euclideos, en este capítulo se da la definición y se presentan los resultados más importantes en este espacio. Por último en el capítulo 7 llegamos a la conclusión del curso con el capítulo de los valores y vectores propios para aplicar todo lo visto en el texto en temas tan importantes como diagonalización de una matriz.

Es de notar que en cada uno de estos capítulos nos preocupamos por entregar una gran variedad de ejemplos, lo que permite al estudiante desarrollar los ejercicios y problemas que se proponen.

Por último queremos manifestar, que nos hacemos responsable de los errores que pueden llegarse a filtrar en esta primera edición y agradecemos de antemano las sugerencias y observaciones que pudieran hacernos llegar.

---

# Capítulo 1

## Vectores rectas y planos

---

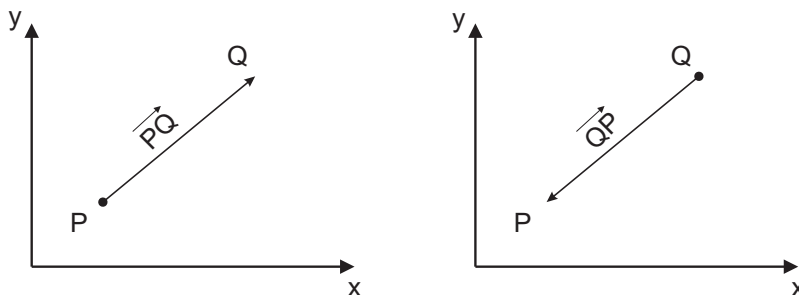
Los vectores eran utilizados en mecánica y en objetos que tenían ciertas velocidades, a finales del siglo *XVII*. Pero este concepto no tuvo repercusión entre los matemáticos de la época, sino hasta el siglo *XIX*, cuando Gauus usa implícitamente la suma vectorial en la representación geométrica de los números complejos en el plano.

El paso siguiente lo da Hamilton cuando inicia el estudio de los vectores. Se debe a él el nombre de vector, producto de la relación de un sistema de números complejos de cuatro unidades, denominados cuaterniones, muy usados hoy en día para el trabajo con rotaciones de objetos en el espacio *3D*. Actualmente, en casi todas las áreas de la física se usa el concepto de vector.

En este capítulo estudiaremos la noción de vector en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  desde el punto de vista geométrico y desde el punto de vista algebraico.

### 1.1. Vectores en el plano ( $\mathbb{R}^2$ )

Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos en el plano. Entonces el segmento de recta dirigido de  $P$  a  $Q$ , denotado por  $\overrightarrow{PQ}$ , es el segmento de recta que va de  $P$  a  $Q$ .



Los segmentos de rectas dirigidos  $\overrightarrow{PQ}$  y  $\overrightarrow{QP}$  son distintos, puesto que tienen direcciones opuestas.

#### Observación

1. El punto  $P$  en el segmento dirigido  $\overrightarrow{PQ}$  es el punto inicial y  $Q$  es el final.



## Otros títulos de interés:

- **Estadística básica aplicada,**  
Ciro Martínez Bencardino
- **Estadística y muestreo,**  
Ciro Martínez Bencardino
- **Fundamentos de estadística.  
Para la investigación en educación,**  
Mireya Ardila Rodríguez
- **Álgebra lineal y programación lineal**  
Francisco Soler, Fabio Molina y  
Lucio Rojas.
- **Didáctica de las matemáticas**  
Robinson Castro Puche y  
Rubby Castro Puche.
- **Fundamentos de matemática**  
Francisco Soler Fajardo y  
Reinaldo Nuñez.
- **Matemáticas financieras aplicadas**  
Jhonny de Jesús Meza Orozco
- **Matemáticas financieras  
empresariales**  
Jhonny de Jesús Meza Orozco
- **Matemáticas para informática**  
Ismael Gutiérrez García.

# Introducción al Álgebra lineal



Quienes participamos en el desarrollo de esta obra pretendemos que sea usada como texto guía o de consulta en los primeros cursos de álgebra lineal de pregrado, que deben cursar aquellos estudiantes de ingenierías o matemáticas. Consta de siete capítulos en los que, sin perder de vista la formalidad de los contenidos, el lector podrá encontrarse con una presentación sencilla, práctica y amena haciendo posible un primer acercamiento al estudio del álgebra lineal. Cada capítulo cuenta con una variedad de ejemplos y ejercicios que permiten al lector afianzar los conceptos y resultados que aquí se presentan, de tal manera que hay un avance notable hacia el rompimiento del paradigma tradicional que hace ver los cursos de álgebra lineal con un notable grado de dificultad. Con esto queremos manifestar que junto con el propósito inicial, también deseamos hacer un aporte para que la complejidad de las matemáticas se presente sin perder rigurosidad, pero estando cada vez más al alcance de todos.

**Área:** Ciencias Exactas

**Colección:** Matemáticas

ECO  
EDICIONES



[www.ecoediciones.com](http://www.ecoediciones.com)

