

Tercera edición

Álgebra lineal y programación lineal

*Con aplicaciones a ciencias
Administrativas, contables y financieras*

ECO E
EDICIONES

Francisco Soler Fajardo
Fabio Molina Focazzio
Lucio Rojas Cortés



ÁLGEBRA LINEAL Y PROGRAMACIÓN LINEAL



Con aplicaciones a ciencias administrativas,
contables y financieras

Con uso de Derive, Q.S.B y Excel

Francisco Soler Fajardo
Fabio Molina Focazzio
Lucio Rojas Cortés

Tercera edición

Soler Fajardo, Francisco

Álgebra lineal y programación lineal : con aplicaciones a ciencias administrativas, contables y financieras / Francisco Soler Fajardo,

Fabio Molina Focazzio, Lucio Rojas Cortés. -- 3a. ed. -- Bogotá : Ecoe Ediciones, 2016.

674 p. -- (Ciencias básicas. Matemáticas) Incluye datos biográficos de los autores en la pasta. -- Incluye complemento virtual SIL (Sistema de Información en Línea) www.ecoediciones.com.

ISBN 978-958-771-320-6

1. Algebras lineales 2. Algebra vectorial 3. Programación lineal I. Molina Focazzio, Fabio Germán II. Rojas Cortés, Lucio III. Título IV. Serie

CDD: 512.5 ed. 21

CO-BoBN- a977196



Colección: *Ciencias básicas*
Área: *Matemáticas*

ECOE
EDICIONES


© Francisco Soler Fajardo
Fabio Molina Focazzio
Lucio Rojas Cortés

© Ecoe Ediciones Ltda.
e-mail: info@ecoediciones.com
www.ecoediciones.com
Carrera 19 N.º 63 C 32, Tel.: 248 14 49
Bogotá, Colombia

Primera edición: Bogotá, agosto de 2003

Segunda edición: Bogotá, 2005

Tercera edición: Bogotá, marzo de 2016

Reimpresión: Bogotá, junio de 2016

Reimpresión: Bogotá, diciembre de 2016

Reimpresión: Bogotá, enero de 2018

ISBN: 978-958-771-320-6

Dirección editorial: Andrés Delgado

Coordinación editorial: Angélica García Reyes

Diagramación: Magda Rocío Barrero

Carátula: Wilson Marulanda

Impresión: Digiprint Editores

Calle 63 Bis N.º 70 - 49

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio
sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Impreso y hecho en Colombia - Todos los derechos reservados

ÁLGEBRA LINEAL Y PROGRAMACIÓN LINEAL

Francisco Soler Fajardo

Docente de Matemática
Pontificia Universidad Javeriana
Universidad Sergio Arboleda
Bogotá, Colombia

Fabio Molina Focazzio

Docente de Matemática
Pontificia Universidad Javeriana
Universidad Sergio Arboleda
Bogotá, Colombia

Lucio Rojas Cortés

Docente de Matemática
Universidad Central
Universidad Militar Nueva Granada
Bogotá, Colombia

Revisión Técnica

Nestor Pedraza Colmenares

Docente de Matemáticas
Pontificia Universidad Javeriana
Universidad Jorge Tadeo Lozano
Bogotá, Colombia

Harold Noriega Usta

Docente de Matemática
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia

Homenaje especial al Dr. Francisco Soler Fajardo
(Q.E.P.D), por el gran legado en sus publicaciones
y con especial aprecio y cariño a nuestras familias,
por su comprensión, estímulo y sacrificio.

Reconocimientos



Hacemos llegar un reconocimiento especial al Brigadier General Hugo Rodríguez Durán, Rector de la Universidad Militar Nueva Granada; a los doctores Rodrigo Noguera Laborde, Rector de la Universidad Sergio Arboleda de Bogotá y al doctor Germán Quintero Andrade Vicerrector Académico de la misma universidad por su permanente estímulo.

Al doctor Rodrigo Noguera Calderón, Rector Adjunto de la Universidad Sergio Arboleda de Bogotá, por su invaluable apoyo en la edición de esta obra.

Al doctor Fernando Novoa, Director del Departamento de Matemática y Estadística de la Pontificia Universidad Javeriana de Bogotá, por su respaldo al éxito de esta obra.

Al doctor Reinaldo Núñez, Director de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda de Bogotá por sus valiosas sugerencias y comentarios sobre los diversos temas de qué trata esta obra.

A la doctora Edel Serrano Iglesias, Directora del Departamento de Matemáticas de la Universidad Central de Bogotá.

Al doctor Mauricio Retrepo López, Director del Departamento de Matemáticas de la Universidad Militar Nueva Granada.

A los profesores Nestor Pedraza Colmenares, Pontificia Universidad Javeriana, Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano y Harold Noriega Usta, profesor de la Pontificia Universidad Javeriana de Bogotá, por la revisión técnica que hicieron a los manuscritos de esta edición.

Así mismo a los profesores Wilson Orlando Urrego Garzón (Q.E.P.D), Universidad Nacional a Distancia UNAD; Numael Ramírez, Fabio Castellanos, Ricardo Bernal, Ricardo de Armas, Davis Macías y Carlos Julio Novoa Martínez de la Universidad

Central de Bogotá; Adrián Ricardo Gómez Plata, Lucia Gutiérrez, Amed Alfonso Alfonso, Arturo Ramírez Baracaldo, Carlos Mora y Jorge Orlando Cuervo de la Universidad Militar Nueva Granada; Luis Enrique Rojas Cárdenas, Pontificia Universidad Javeriana, por la adición de problemas que aportaron a esta edición.

Queremos expresar nuestro agradecimiento a los siguientes profesores que nos han prestado su ayuda a lo largo de las diversas etapas de elaboración de la presente obra; sus muestras de apoyo, sus críticas y sugerencias han tenido para nosotros un valor inestimable:

- Norma Constanza Sarmiento, Pontificia Universidad Javeriana
- Gloria E. Rodríguez de Granados, Fundación Universidad Agraria de Colombia, Universidad Santo Tomás.
- Ricardo Bernal Bueno, Universidad Central de Bogotá, Universidad Jorge Tadeo Lozano de Bogotá.

Con gratitud a nuestros alumnos de la Universidad Sergio Arboleda, la Pontificia Universidad Javeriana y la Universidad Central de Bogotá, por sus sugerencias en el desarrollo y correcciones de los manuscritos de esta obra.

Contenido



INTRODUCCIÓN	XIX
1. MATRICES	1
Introducción	2
Objetivos	2
1.1 Matrices	3
Matriz cuadrada	4
Igualdad de matrices	5
Matriz nula	6
Ejercicio 1.1	6
1.2 Operaciones entre matrices	7
Suma algebraica de matrices	7
Multiplicación de una matriz por un escalar	8
Inverso aditivo de una matriz	8
Símbolo de sumatoria o notación sigma	11
Propiedades de la sumatoria	12
Expresión abreviada de productos matriciales	14
Producto de matrices.....	15
Ejercicio 1.2	17
1.3 Propiedades de las operaciones entre matrices.....	28
Ejercicio 1.3	30

1.4 Tipos especiales de matrices	31
Diagonal principal	31
Matriz triangular superior.....	31
Matriz triangular inferior	31
Matriz triangular.....	31
Matriz diagonal	32
Matriz escalar	32
Matriz identidad.....	32
Matrices que conmutan	33
Matriz idempotente	33
Matriz nilpotente.....	33
Ejercicio 1.4	34
1.5 Matriz traspuesta y propiedades de la traspuesta	35
Matriz simétrica y antisimétrica	36
Ejercicio 1.5	38
Ejercicios Complementarios	39
Cuestionario.....	41
1.6 Taller de Informática con uso de DERIVE.....	43
Creación de una matriz	43
Operaciones entre matrices	45
Multiplicación de una matriz por un escalar	46
Multiplicación de matrices	47
Definición de una matriz mediante fórmula.....	49
Utilización de la sumatoria	50
Traza de una matriz	52
Matriz identidad de orden $n \times n$	53
Matriz traspuesta	54
1.7 Taller de informática con uso de Excel	56
Creación de una matriz	56
Operaciones entre matrices	57
Multiplicación de una matriz por un escalar	59
Multiplicación de matrices	61
Resumen	66
Glosario	69
2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.....	71
Introducción	73
Objetivos	73
2.1 Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables	74
Ejercicio 2.1	79
2.2 Sistemas de m ecuaciones lineales con n variables	80
Solución de un sistema de m ecuaciones con n variables	81

Sistemas consistentes e inconsistentes	82
Expresiones matriciales de un sistema de ecuaciones lineales	82
Sistemas equivalentes	84
Ejercicio 2.2	84
Método de eliminación de Gauss y Gauss-Jordan	85
Operaciones elementales entre filas	85
Matriz aumentada	90
Matriz escalonada	91
Matriz escalonada reducida	92
Método de Gauss	92
Método de Gauss-Jordan	100
Múltiples soluciones	109
Rango de una matriz	111
Estudio del tipo de solución de un sistema no homogéneo	112
Determinación del tipo de solución de un sistema de ecuaciones lineales	112
Ejercicio 2.3	116
2.4 Sistemas lineales homogéneos	123
Estudio del tipo de solución de un sistema homogéneo	123
Ejercicio 2.4	125
2.5 Matriz inversa	125
Procedimiento para hallar la inversa de una matriz A , aplicando el método de Gauss-Jordan	127
Inversa de una matriz 2×2	130
Solución de un sistema de ecuaciones utilizando la inversa de la inversa de la matriz de coeficientes	133
Propiedades de la matriz inversa	135
Relación entre inversas y sistemas de ecuaciones	138
Ejercicio 2.5	140
Ejercicios complementarios	142
Cuestionario	143
2.6 Taller de informática con uso de "DERIVE"	145
Operaciones elementales entre filas	145
Multiplicar una fila de una matriz por un escalar	146
Restar a la fila i de la matriz A , c veces la fila j de A	147
Rango de una matriz	154
Inversa de una matriz	156
2.7 Taller de informática con uso de "Excel"	157
Inversa de una matriz	157
Solución de un sistema de m ecuaciones lineales con m variables	158
Resumen	162
Glosario	164

3. DETERMINANTES	165
Introducción	166
Objetivos	166
Determinantes de orden 2×2 y 3×3	167
3.1 Determinantes de orden 3×3	169
Regla de Sarrus para calcular un determinante de orden 3×3	170
Ejercicio 3.1	171
3.2 Determinantes de orden $n \times n$	172
Menor i, j	172
Cofactor i, j	173
Matriz de cofactores	173
Signos de los cofactores	175
Determinantes de orden $n \times n$	176
Ejercicio 3.2	180
3.3 Propiedades de los determinantes	182
Ejercicio 3.3	189
3.4 Matriz Adjunta y matriz inversa	190
Propiedad de la matriz adjunta	191
Cálculo de la matriz inversa utilizando la adjunta	191
Matriz insumo producto de Leontief	192
Ejercicio 3.4	197
3.5 Regla de Cramer	201
Regla de Cramer para sistemas 2×2	201
Regla de Cramer para sistemas 3×3	202
Ejercicio 3.5	206
Ejercicios Complementarios	209
Cuestionario	212
3.6 Taller de Informática con uso de DERIVE	214
Cálculo de un determinante	214
Menor i, j de una matriz M_{ij}	214
Cofactor i, j de una matriz. C_{ij}	215
Matriz Adjunta. (adj (A))	216
3.7 Taller de informática con uso de Excel	220
Cálculo del determinante de una matriz cuadrada	220
Verificación de algunas propiedades de los determinantes	221
Solución de un sistema de m ecuaciones lineales con m variables utilizando la regla de Cramer	223
Resumen	226
Glosario	228
4. INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL	229
Introducción	232
Objetivos	232

4.1 Desigualdades lineales	233
Gráfica de una desigualdad lineal en dos variables	233
Recta vertical	233
Recta horizontal	235
Recta oblicua	237
Semiplano abierto	240
Semiplano cerrado	240
Desigualdades lineales simultáneas con dos variables	242
Propiedad de las desigualdades	245
Ejercicio 4.1	253
4.2 Problema estándar de Programación Lineal (PL) y Método Gráfico	258
Modelo de Programación Lineal en forma general	258
Método gráfico	261
Región Factible	261
Punto de Esquina o Vértice de la Región Factible	261
Pasos para resolver un problema con Método Gráfico	261
Determinación de la Solución Óptima algebraicamente	268
Teorema de Programación Lineal	270
Otro método de solución	270
Problema de Mínimo con el Método Gráfico	272
Ejercicio 4.2	276
4.3 Problemas con Múltiples Soluciones No Acotados y Degenerados	282
CASO I. Soluciones óptimas-múltiples	283
CASO II. No Factibilidad	283
CASO III. No Acotamiento	284
Ejercicio 4.3	285
4.4 Taller de informática con uso de Excel	289
Problema de maximización	289
4.5 Taller de informática con uso de QSB	296
Problema de maximización	296
Problema de minimización	301
Resumen	304
Glosario	306
5. PLANTEAMIENTO DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL	309
Modelos de programación lineal	310
Introducción	311
Objetivos	311
5.1 Problema de la dieta	312
5.2 Problema del transporte	313
5.3 Problema de asignación	316
5.4 Problema del excursionista	317

5.5 Problema financiero	318
5.6 Planificación de personal	320
5.7 Problema de mercadotecnia	323
5.8 Problema de producción	326
5.9 Problema de mezclas	330
5.10 Proyecto de finanzas	331
5.11 Aplicaciones contables	334
Problemas propuestos	337
5.12 Taller de Informática con QSB	350
5.13 Taller de informática con uso de EXCEL	362
6. MÉTODO SIMPLEX	371
Introducción	372
Objetivos	372
6.1 Conceptos básicos del Método Simplex	373
Variable de holgura	374
Problema original sin variables de holgura	375
Problema de programación lineal con variables de holgura	375
Variables básicas y solución básica	375
Solución básica factible	377
6.2 Tabla simplex inicial	378
Columna pivote y fila pivote	384
Elemento pivote	384
Operaciones elementales entre filas	385
Finalización de las iteraciones en el método simplex	388
Interpretación de los resultados	390
6.3 Comparación del método simplex con el método gráfico	390
6.4 Restricciones con desigualdades del tipo mayor o igual	393
6.5 Solución de problemas de minimización con el método simplex	401
Planteamiento del modelo	401
6.6 Casos especiales	403
Múltiples soluciones	403
Modelo de no factibilidad	408
No acotamiento	411
Ejercicios	413
6.7 Taller de Infomática con uso de QSB	425
Resumen	428
Glosario	429
7. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD Y DUALIDAD	431
Introducción	432
Objetivos	432

7.1	Análisis de sensibilidad con método gráfico	433
	Cambios en un coeficiente de la función objetivo	433
	Intervalo de optimalidad	433
	Cambios en los términos independientes de una restricción (Lados derechos)	437
	Precio sombra	438
	Análisis de sensibilidad con el método simplex	438
	Intervalo de optimalidad para variables básicas	438
	Intervalo de optimalidad para variables no básicas	442
	Cambios en el lado derecho de una restricción	443
	Precio sombra	443
	Método para calcular los intervalos de factibilidad	446
	Método para restricciones menor o igual	446
	Método para restricciones mayor o igual	446
	El problema dual	449
	Relación entre el primal y el dual	450
	Forma general del problema dual	450
	Forma estándar	454
	Interpretación económica de las variables duales	457
	Dual para el primal con cualquier tipo de restricción	460
	Ejercicios	462
7.2	Taller de Informática con uso de QSB	470
	Resumen	476
	Glosario	477
8.	TRANSPORTE, ASIGNACIÓN, TRANSBORDO Y PERT/CPM	479
	Origen de la programación lineal	479
	Introducción	482
	Objetivos	482
8.1	Modelo de transporte	483
8.2	Modelo generalizado de transporte	483
	Planteamiento de la función objetivo	488
	Restricciones de oferta	488
	Restricciones de demanda	489
	Planteamiento del modelo de transporte	489
	Método del cruce del arroyo	489
	FASE 1	490
	Índice de mejoramiento	493
	Resumen	495
	Mejoramiento de la solución pendiente	498
	Resumen del problema	502
8.3	Modelo de transporte no equilibrado	502

8.4 Problema de asignación	510
Red de modelo de asignación del problema de proyectos de monografías	512
Planteamiento de la función objetivo	513
8.5 Modelo general de programación lineal para el problema de asignación.....	515
8.6 Método Húngaro	515
Pasos de método Húngaro	516
PASO I. Reducción de filas	516
PASO II. Reducción de columnas	517
Prueba de optimalidad	518
PASO III. Determinar si el problema es óptimo	518
PASO IV. Reducciones posteriores	518
PASO V. Solución óptima	519
Resumen del método Húngaro en un diagrama de flujo	521
8.7 Problema de transbordo	522
8.8 PERT/CPM	527
Tiempos próximos	529
Tiempo próximo de iniciación	532
Tiempos lejanos	533
Tiempo lejano de terminación	536
Holgura de una actividad	537
Ruta crítica	537
Cálculo de la ruta crítica	539
Ejercicios	542
8.9 Taller de informática con uso de “QSB”	552
Problema de transporte	552
Problema de asignación	559
Problema de PERT/CPM	565
Resumen	571
Glosario	572
RESPUESTAS A ALGUNOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS	573

En el Complemento Virtual del SIL (*Sistema de Información en Línea*) podrá encontrar los archivos como apéndices y resúmenes de fórmulas que se utilizan a lo largo del libro, en los cuales, además del ejemplo resuelto, se incluyen ejercicios complementarios de la situación que se está estudiando.



Introducción



En la actualidad las compañías manejan proyectos de gran envergadura, donde intervienen una cantidad considerable de variables, las cuales en muchos casos están relacionadas entre sí por ecuaciones o inecuaciones lineales.

En el desarrollo de un proyecto empresarial es necesario efectuar diferentes procesos, los cuales generan gran cantidad de datos numéricos, que únicamente pueden ser procesados en forma computacional, mediante el uso de matrices y sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales.

Por las razones anteriormente expuestas nos propusimos la tarea de escribir el libro de Álgebra Lineal con una introducción a la Programación lineal, desarrollado para estudiantes de Ciencias administrativas, Contables y Financieras con el objeto de proporcionar al alumno técnicas para resolver problemas operativos y darle alternativas y soluciones en el entorno empresarial, asesorando a diversas entidades sobre la forma de manejar mejor sus recursos y hacer planes de inversión.

La utilización de la tecnología es fundamental en el desarrollo del curso de Álgebra Lineal, ya que el estudiante afianza sus conocimientos resolviendo problemas en forma computacional, abandonando en parte los cálculos manuales, largos y tediosos y dedicándose más al aprendizaje de los conceptos.

En las secciones de tecnología al final de cada capítulo se utiliza DERIVE, Q.S.B o EXCEL, programas bajo ambiente Windows, reconocidos a nivel mundial y de fácil manejo y acceso para estudiantes y profesores.

Álgebra lineal y programación lineal



En proyectos empresariales de gran envergadura que involucran análisis de mercados, producción en serie y logística de distribución interviene una cantidad considerable de variables que en muchos casos están relacionadas entre sí por medio de ecuaciones o inecuaciones lineales. Los procesos en estos proyectos generan una gran cantidad de datos numéricos que solamente pueden ser procesados en computadores mediante el uso de matrices y *software* en computadores.

Incluye

- Uso y creación de matrices con Derive y Excel
- Programación lineal aplicada a problemas de transporte, mercadotecnia, producción y personal, y solución con QSB y Excel.
- Descripción del Método Simplex para resolver problemas de programación lineal con dos o más variables de decisión.

Los autores crearon este texto teniendo en mente a los estudiantes de ciencias administrativas, contables y financieras con el objetivo de proporcionarles las bases matemáticas y las técnicas de análisis en *software* de fácil acceso para resolver problemas operativos, manejar eficientemente los recursos de un proyecto y crear mejores planes de inversión a partir de grandes cantidades de datos numéricos. Al final de cada capítulo los lectores podrán afianzar sus conocimientos con los ejercicios propuestos con los programas Derive, Q.S.B y Microsoft Excel, junto con los ejercicios adicionales disponibles en el Sistema de Información en Línea (SIL).

Este es un texto fundamental para estudiantes de los pregrados de Administración de Empresas, Finanzas, Ingeniería Industrial, Contabilidad y, en general, cursos, diplomados y maestrías que involucren gerencia de recursos, proyectos y planeación en una empresa.

Colección: Ciencias básicas

Área: Matemáticas

ECOE
EDICIONES



www.ecoediciones.com

ISBN 978-958-771-320-6



9 789587 713206