

A decorative frame made of dotted lines, forming a large rectangle with inward-pointing corners on the left and right sides.

**PROGRAMACIÓN
LINEAL APLICADA**

HUMBERTO GUERRERO SALAS

TERCERA EDICIÓN

Humberto Guerrero Salas, autor

Programación lineal aplicada / Humberto Guerrero Salas. -- Tercera edición. -- Bogotá : Ecoe Ediciones, 2022.
389 páginas.

Incluye datos curriculares del autor -- Incluye bibliografía.

ISBN 978-958-503-382-5 (impreso) - 978-958-503-383-2 (e-book)

1. Programación lineal - Problemas, ejercicios, etc. 2. Programación (Administración) - Problemas, ejercicios, etc.

CDD: 519.72 ed. 23

CO-BoBN- a1094917



Área: Ingeniería y afines

Subárea: Ingeniería Industrial

ECOE
EDICIONES



© Humberto Guerrero Salas

► Ecoe Ediciones S.A.S.
info@ecoeediciones.com
www.ecoeediciones.com
Carrera 19 # 63C 32, Tel.: 919 80 02
Bogotá, Colombia

Tercera edición: Bogotá, julio del 2022

ISBN: 978-958-503-382-5
e-ISBN: 978-958-503-383-2

Directora editorial: Claudia Garay Castro
Coordinadora editorial: Paula Bermúdez B.
Corrección de estilo: Orlando Riaño
Diagramación: Denis Rodríguez
Carátula: Wilson Marulanda Muñoz
Impresión: Carvajal Soluciones de
Comunicación S.A.S.
Carrera 69 #15-24

*Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio
sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.*

Impreso y hecho en Colombia - Todos los derechos reservados

AGRADECIMIENTOS

Al terminar esta obra, me gustaría nombrar a muchas personas; lamentablemente no lo puedo hacer. A quienes omito, me sabrán perdonar.

Agradecimientos muy especiales:

- A la universidad distrital *Francisco José de Caldas* Institucion para la cual laboro como docente de carrera desde el 15 de febrero de 2010.
- Al ingeniero *Orlando De Antonio*, un gran amigo; sin su apoyo y opiniones hubiera sido difícil llegar al final.
- Al ingeniero *Jairo Humberto Torres Acosta* (q.e.p.d.), mi maestro, colega y amigo, quien me inició en el tema de la investigación de operaciones.
- Al doctor *Jairo Correa Rodríguez* (q.e.p.d.), sus ideas fueron fundamentales en el inicio de este texto.
- Al ingeniero *Wilson Hernando Soto Urrea*, sus sugerencias y recomendaciones fueron valiosas.
- A todo el equipo de trabajo de Ecoe Ediciones; ellos han hecho posible esta publicación.
- Al personal de «Software shop», quienes autorizaron el uso del paquete WinQBS para la solución de ejercicios de este texto. Los interesados en contactar con esta empresa distribuidora de software científico y líder del mercado en Latinoamérica, pueden hacerlo en www.software-shop.com
- A todos mis estudiantes, durante los últimos 32 años.

CONTENIDO

PRÓLOGO	XV
INTRODUCCIÓN	XVII
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL	1
1.1 Presentación	1
1.1.1 Objetivo general.....	1
1.1.2 Competencias.....	2
1.1.3 Indicadores de logro.....	2
1.1.4 Conocimientos previos	2
1.2 Generalidades.....	2
1.3 Ejemplo prototipo	2
1.3.1 Análisis de la información.....	3
1.4 Modelo general de programación lineal	4
1.4.1 Forma estándar del modelo de programación lineal	5
1.4.2 Forma matricial del modelo de programación lineal	5
1.4.3 Forma sumatoria	7
1.4.4 Forma canónica del modelo de programación lineal	7
1.4.5 Otras formas del modelo	8
1.5 Procedimiento para la construcción de modelos	8
1.5.1 Paso 1: Formulación del modelo	8
1.5.2 Paso 2. Análisis de la información	8
1.5.3 Paso 3. Definición de variables	8

1.5.4 Paso 4. Establecer la función objetivo.....	9
1.5.5 Paso 5. Determinar las restricciones.....	9
1.5.6 Paso 6. Solución del modelo matemático.....	9
1.5.7 Paso 7. Prueba del modelo y la solución.....	9
1.5.8 Paso 8. Implantación del modelo.....	10
1.5.9 Paso 9. Controlar y retroalimentar.....	10
1.6 Reglas de equivalencia.....	10
1.6.1 Primera regla.....	10
1.6.2 Segunda regla.....	10
1.6.3 Tercera regla.....	10
1.6.4 Cuarta regla.....	11
1.6.5 Quinta regla.....	11
1.6.6 Sexta regla.....	12
1.7 Suposiciones de la programación lineal.....	12
1.7.1 Suposición de aditividad.....	13
1.7.2 Suposición de divisibilidad.....	13
1.7.3 Suposición de certidumbre.....	13
CAPÍTULO 2. PLANTEAMIENTO DE MODELOS DE	
PROGRAMACIÓN LINEAL.....	15
2.1 Presentación.....	15
2.1.1 Objetivo general.....	15
2.1.2 Competencias.....	15
2.1.3 Indicadores de logro.....	16
2.1.4 Conocimientos previos.....	16
2.2 Aplicaciones en producción.....	16
2.3 Aplicaciones en dietas.....	25
2.4 Aplicaciones de mezcla.....	26
2.5 Aplicaciones en distribución.....	33
2.6 Aplicaciones en asignación.....	39
2.7 Aplicaciones en comercialización.....	44
2.8 Aplicaciones en publicidad.....	46
2.9 Aplicaciones en el medio ambiente.....	48
2.10 Aplicaciones agrícolas.....	50
2.11 Aplicaciones financieras.....	52
2.12 Problemas propuestos.....	56
CAPÍTULO 3. PROGRAMACIÓN LINEAL: MÉTODO GRÁFICO.....	73
3.1 Presentación.....	73
3.1.1 Objetivo general.....	73
3.1.2 Competencias.....	74
3.1.3 Indicadores de logro.....	74

3.1.4 Conocimientos previos	74
3.2 Problemas de maximización	74
3.2.1 Solución única.....	74
3.2.2 Solución óptima múltiple	80
3.2.3 Solución no acotada	84
3.2.4 Problema sin solución.....	86
3.3 Problemas de minimización.....	88
3.3.1 Solución única.....	88
3.3.2 Solución óptima múltiple	92
3.3.3 Solución no acotada	95
3.3.4 Problema sin solución.....	97
3.3.5 Solución degenerada	99
3.3.6 Restricciones de igualdad.....	102
3.4 Problemas propuestos	105
CAPÍTULO 4. PROGRAMACIÓN LINEAL: MÉTODO SIMPLEX	119
4.1 Presentación	119
4.1.1 Objetivo general.....	119
4.1.2 Competencias.....	120
4.1.3 Indicadores de logro.....	120
4.1.4 Conocimientos previos	120
4.2 Problemas de maximización	122
4.2.1 Solución única.....	122
4.2.2 Solución óptima múltiple	127
4.2.3 Solución no acotada	129
4.2.4 Problema sin solución.....	132
4.3 Problemas de minimización.....	134
4.3.1 Solución única.....	134
4.3.2 Solución óptima múltiple	137
4.3.3 Solución no acotada	139
4.3.4 Problema sin solución.....	140
4.3.5 Solución degenerada	143
4.3.6 Restricciones de igualdad.....	144
4.4 Problemas propuestos	148
CAPÍTULO 5. PROGRAMACIÓN LINEAL: MÉTODOS ESPECIALES	161
5.1 Presentación	161
5.1.1 Objetivo general.....	161
5.1.2 Competencias.....	162
5.1.3 Indicadores de logro.....	162
5.1.4 Conocimientos previos	162
5.2 Método de doble fase.....	162

5.2.1 Primera fase.....	162
5.2.2 Segunda fase	162
5.3 Método dual simplex.....	171
5.4 Problemas propuestos	175
CAPÍTULO 6. PROGRAMACIÓN LINEAL: DUALIDAD.....	189
6.1 Presentación	189
6.1.1 Objetivo general.....	189
6.1.2 Competencias.....	190
6.1.3 Indicadores de logro.....	190
6.1.4 Conocimientos previos	190
6.2 Problemas de maximización	193
6.2.1 Solución única.....	193
6.2.2 Solución óptima múltiple	196
6.2.3 Solución no acotada	199
6.2.4 Problema sin solución.....	201
6.3 Problemas de minimización	203
6.3.1 Solución única.....	203
6.3.2 Solución óptima múltiple	207
6.3.3 Solución no acotada	209
6.3.4 Problema sin solución.....	211
6.3.5 Solución degenerada	213
6.3.6 Restricciones de igualdad	215
6.4 Interpretación económica de la dualidad.....	218
6.5 Problemas propuestos.....	220
CAPÍTULO 7. PROGRAMACIÓN LINEAL: ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD	233
7.1 Presentación	233
7.1.1 Objetivo general.....	233
7.1.2 Competencias.....	234
7.1.3 Indicadores de logro.....	234
7.1.4 Conocimientos previos	234
7.2 Introducción	234
7.3 Cambio en la disponibilidad de recursos (Vector b).....	238
7.4 Cambio en precios o costos unitarios (Vector c).....	241
7.5 Cambio en la asignación unitaria de recursos (matriz A o vectores aj)	244
7.5.1 Nuevas restricciones.....	247
7.6 Nuevos productos o actividades	252

7.7 Problemas propuestos	255
CAPÍTULO 8. TRANSPORTE, TRANSBORDO Y ASIGNACIÓN	257
8.1 Presentación.....	257
8.1.1 Objetivo general.....	257
8.1.2 Competencias.....	258
8.1.3 Indicadores de logro.....	258
8.1.4 Conocimientos previos.....	258
8.2 El modelo del transporte	258
8.2.1 Estructura general	258
8.2.2 Primera solución básica factible	260
8.2.3 Solución óptima.....	271
8.3 El modelo del transbordo.....	278
8.4 El modelo de asignación.....	284
8.5 Problemas propuestos.....	289
CAPÍTULO 9. PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA.....	293
9.1 Presentación.....	293
9.1.1 Objetivo general.....	293
9.1.2 Competencias.....	294
9.1.3 Indicadores de logro.....	294
9.1.4 Conocimientos previos.....	294
9.2 Método gráfico.....	294
9.3 Método simplex	296
9.4 Problemas propuestos.....	310
CAPÍTULO 10. OPTIMIZACIÓN EN REDES	317
10.1 Presentación.....	317
10.1.2 Objetivo general.....	317
10.1.3 Competencias.....	317
10.1.4 Indicadores de logro.....	318
10.1.5 Conocimientos previos.....	318
10.2 Generalidades del manejo de redes	318
10.2.1 Conceptos básicos	318
10.2.2 Reglas de construcción de redes.....	319
10.3 Método de la ruta crítica (CPM).....	323
10.3.1 Construcción de la red.....	324
10.3.2 Cálculo de tiempos hacia adelante	326
10.3.3 Cálculo de tiempos hacia atrás	327
10.3.4 Actividades de la ruta crítica.....	328
10.3.5 Holguras de las actividades	329
10.4 Técnica de evaluación y revisión de programas (PERT).....	333
10.4.1 Generalidades del PERT.....	333

- 10.4.2 Tiempo esperado 337
- 10.4.3 Red del proyecto 338
- 10.4.4 Varianza de las actividades y varianza del proyecto 338
- 10.4.5 Desviación estándar y cálculo de probabilidades..... 340
- 10.5 Reducción de tiempos a costo mínimo 341
 - 10.5.1 Generalidades 341
 - 10.5.2 Construcción de la red..... 343
 - 10.5.3 Tiempos y costos de reducción..... 344
 - 10.5.4 Proceso iterativo de reducción..... 346
- 10.6 Problemas propuestos..... 355

- RESPUESTAS DE PROBLEMAS PROPUESTOS 371**
 - Capítulo 2..... 371
 - Capítulo 3..... 371
 - Capítulo 4..... 373
 - Capítulo 5..... 375
 - Capítulo 6..... 378
 - Capítulo 7..... 381
 - Capítulo 8..... 381
 - Capítulo 9..... 382
 - Capítulo 10 384

- BIBLIOGRAFÍA 389**

PRÓLOGO

Al recibir, del ingeniero *Humberto Guerrero Salas*, la invitación para revisar el texto que en este momento tiene el lector en sus manos, mi primera impresión, fue que se trataba de un libro más de los muchos que actualmente se encuentran en el mercado.

Sin embargo, al adentrarme en una lectura rigurosa del mismo me causó gran curiosidad cómo el *ingeniero Guerrero*, abordó los temas de una manera realmente extraordinaria, ya que el rigor pedagógico y didáctico con el que está construido da un nuevo enfoque de la verdadera utilización de la investigación de operaciones, en especial de la programación lineal, hoy en día. Empezando, por la descripción y formulación detallada en los primeros capítulos, sobre cómo realizar un óptimo planteamiento de un problema ingenieril, lo cual brinda al estudiante una motivación y herramientas sin precedentes para la utilización eficaz de las matemáticas como un instrumento práctico de la Ingeniería, que no poseen en otros textos avanzados de programación lineal.

Al continuar en los capítulos posteriores, el estudiante ya consolidado en el planteamiento de problemas, se encontrará con una metodología eficaz e innovadora en la resolución de los problemas e interpretación adecuada de las soluciones, producto de la experiencia y las investigaciones que el Ingeniero Guerrero ha realizado en su trayectoria profesional; siendo así, tenemos un texto ágil e innovador en el desarrollo de soluciones óptimas a partir del análisis de sensibilidad, el cual permite que el estudiante, al reemplazar algunos de los parámetros más

significativos, puede replantear un problema, sin tener que remitirse necesariamente al principio.

Por último, solo espero que el presente texto sea aprovechado al máximo por el futuro profesional, como un texto dinamizador e integrador de los procesos de optimización; un documento que, de seguro, se convertirá en un libro de necesaria consulta en el ámbito ingenieril.

Ingeniero, magíster, doctorando Wilson Hernando Soto Urrea.

INTRODUCCIÓN

Desde la década de los ochenta, cuando inicié mis estudios ingenieriles, tuve una pasión por la ciencias exactas, en especial por las matemáticas, pero a medida que avanzaba en mis estudios universitarios descubrí ciertas falencias en el aprendizaje de las matemáticas aplicadas; de ahí que mi propósito, desde hace años, como docente de ingeniería en varias universidades del país ha sido elaborar un libro con una didáctica y una pedagogía innovadora, un texto con el cual el estudiante pueda sortear con mayor facilidad los obstáculos que se presentan en su aprendizaje matemático y, además, con aplicaciones prácticas y de diario vivir en la ingeniería. Este libro nace de mi larga experiencia como docente de *Investigación de operaciones*.

La investigación de operaciones inicia con la argumentación de la programación lineal. Consulté, leí y estudié un sin número de textos referentes al tema, todos ellos muy buenos, pero nunca quedé satisfecho con la forma en que abordaban los temas y especialmente las explicaciones, porque quedaban muchas dudas sin resolver y esto no me permitía profundizar cómo yo quería en el tema. Este hecho generó en mí la inquietud de por escribir un texto que hiciera claridad en las explicaciones y procesos, para obtener un resultado óptimo que se ajuste a las verdaderas necesidades de la ingeniería en la sociedad de hoy. Resultado que necesariamente debe ser interpretado a la luz de las aplicaciones y no en términos de variables. Es posible que este último acontecimiento sea lo más motivante en la realización del presente texto, porque primordialmente se hace énfasis en la generación o construcción de un modelo matemático a partir de una formulación, y no lo que

generalmente se acostumbra: dar una función objetivo con unas restricciones para aplicar un algoritmo de solución. Es por esto que a través de todo el texto se tiene en cuenta la formulación del problema, la construcción del modelo matemático, la obtención de una solución óptima aplicando un procedimiento establecido dentro del texto para, finalmente, realizar una interpretación práctica de la solución óptima.

En esta segunda edición se han corregido algunos errores de transcripción y redacción; además, se ha agregado el capítulo de programación entera. Los diez capítulos resultantes llevan una secuencia lógica en el desarrollo y avance para la adquisición de los conocimientos y se resumen de la siguiente manera:

- **Capítulo 1.** Hace referencia a todas las generalidades de la programación lineal, entre las cuales se mencionan los pasos para construir un modelo matemático, las reglas de equivalencia, la estructura general del modelo y los usos de la programación lineal.
- **Capítulo 2.** Se avanza hacia el tema de la construcción de modelos a partir de una formulación teniendo en cuenta diferentes aplicaciones en producción, mezclas y distribución, entre otros.
- **Capítulo 3.** Se trata, paso a paso, el método de solución gráfica de problemas de programación lineal, con su correspondiente formulación de las aplicaciones e interpretación de las respuestas.
- **Capítulo 4.** Se da un paso adelante a la aplicación del método simplex, teniendo en cuenta nuevamente la formulación e interpretación. Dentro de estas interpretaciones se realizan aplicaciones en cuanto a las diferentes respuestas que se pueden presentar tales como: solución única, solución múltiple, solución no acotada, no solución y solución degenerada.
- **Capítulo 5.** En este capítulo se presentan dos métodos alternativos de solución: método de doble fase y método dual simplex, con su correspondiente procedimiento e interpretación de las soluciones.
- **Capítulo 6.** Se aborda el tema de la dualidad en sus diferentes alternativas de solución, realizando comparación con las soluciones obtenidas a través del método simplex.
- **Capítulo 7.** Para este capítulo se pasa al análisis pos óptimo de las soluciones. Se realizan aplicaciones de cambio en la disponibilidad de los recursos, cambio en costos o precios unitarios, cambio en recursos tecnológicos, nuevas restricciones y nuevos productos. En cada tipo de modificación se realizan ejemplificaciones de cuándo se presenta cambio en la solución óptima y cuándo no se presenta cambio en la misma.

- **Capítulo 8.** Se abordan los problemas de transporte, asignación y trasbordo, realizando la formulación, la primera solución básica factible y el avance hacia la óptimalidad, con su correspondiente procedimiento e interpretación de la solución.
- **Capítulo 9.** Aquí se presenta, en forma gráfica y con el método simplex, la solución de problemas de programación entera. Es un apartado que se ha enriquecido y hace, de esta segunda edición, una herramienta de gran utilidad para los estudiantes.
- **Capítulo 10.** En este aparte se tratan las redes de optimización en la administración de proyectos. Aquí se muestra, inicialmente, el manejo de redes a través del método de la ruta crítica; seguidamente, se adiciona la parte probabilística con PERT y se finaliza con la reducción de los tiempos a costo mínimo.

Al final del texto, en el apéndice, se encuentra la solución de algunos ejercicios seleccionados. Además, se cuenta con el complemento virtual en donde se le da el manejo y solución de los problemas con el paquete WinQBS.

Vale la pena mencionar que este texto, por su estructura, es muy sencillo de comprender, pero se requiere, obviamente, de conocimientos elementales de matemáticas y álgebra lineal (matemáticas primitivas). Además, el texto puede ser básico, no solo para ingeniería sino también para cualquier profesión que esté interesada en el tema.

Para terminar, quiero agradecer a todas las personas que deseen colaborar con el mejoramiento de este texto enviando sus sugerencias a:

azhguerrero@yahoo.com.mx

hguerreros@correo.udistrital.edu.co

El autor